

## Шексіз үлкен және шексіз кіші тізбектер.

### Тізбектің шегі.

Егер  $\forall \varepsilon > 0$  саны және  $\forall n \geq n_\varepsilon$  үшін  $|x_n| > \varepsilon$  теңсіздігін қанағаттандыратын  $n_\varepsilon$  нөмірі табылса,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  тізбегін *шексіз үлкен тізбек* деп атайды.

**Есеп.**  $x_n = (-1)^n n$  тізбегі шексіз үлкен екенін дәлелдеңіз.

**Дәлелдеуі.**  $\forall \varepsilon > 0$  аламыз. Мақсатымыз:  $|x_n| > \varepsilon$  теңсіздігін

қанағаттандыратын  $n_\varepsilon$  нөмірін табу.  $|x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow |(-1)^n n| > \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon$ .

Ендеше,  $n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1$ .

Егер  $\forall \varepsilon > 0$  саны және  $\forall n \geq n_\varepsilon$  үшін  $|x_n| < \varepsilon$  теңсіздігін қанағаттандыратын  $n_\varepsilon$  нөмірі табылса,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  тізбегін *шексіз кіші тізбек* деп атайды.

**Есеп.**  $x_n = \frac{1}{n!}$  тізбегі шексіз кіші екенін дәлелдеңіз.

**Дәлелдеуі.**  $\forall \varepsilon > 0$  аламыз. Мақсатымыз:  $|x_n| < \varepsilon$  теңсіздігін

қанағаттандыратын  $n_\varepsilon$  нөмірін табу.  $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n!} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n!} < \varepsilon$ . Соңғы

теңсіздікті бағаласақ,

$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ , ізделінді нөмірді мына теңсіздіктен

табамыз:

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n-1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon = \left[ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Егер  $\forall \varepsilon > 0$  саны және  $\forall n \geq n_\varepsilon$  үшін  $|x_n - a| < \varepsilon$  теңсіздігін қанағаттандыратын

$n_\varepsilon$  нөмірі табылса,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сандық тізбегі  $a$  санына *жинақталады* деп

*айтамыз және*  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  деп жазамыз.

**Есеп.**  $x_n = \frac{n}{n+1}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) тізбегі берілген.

Дәлелдеу керек:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Дәлелдеуі:**  $\forall \varepsilon > 0$  аламыз. Мақсатымыз:  $|x_n - 1| < \varepsilon$  теңсіздігін қанағаттандыратын  $n_\varepsilon$  нөмірін табу.

$$|x_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

### Монотонды тізбектің шегі. $e$ саны.

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\uparrow} e$  тізбегі жинақты екені белгілі.

$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\downarrow} e$  тізбегі кемімелі және  $e$  санына жинақталатын көрсету керек.

$$\blacktriangleright \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = x_n,$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e. \blacktriangleleft$$

Бұл формулалардан  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < e < y_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ аламыз.}$$

Соңғы қосарлы теңсіздікті негізі  $e > 1$  бойынша логарифмдесек:

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Бұдан: } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Айталық,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сандық тізбегінің барлық мүшелері оң анықталсын, яғни,  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$ . Осы шарт орындалса тізбектің монотондылығын басқа тәсілмен беруге болады. - Бұл тізбек *өспелі* (кемімейтін, кемімелі,

*өспейтін*) болады, егер  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$  ( $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ ,  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ ).

**Есеп.** Монотонды және шектелген тізбектің шегі бар екені туралы теореманы қолданып, тізбектің жинақты екенін дәлелдеу керек:

$$x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

**Дәлелдеуі.** 1) Тізбектің барлық мүшелері оң.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1} \cdot \frac{n+10}{2n+1}}{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \frac{n+10}{2n+1} < 1, \quad \text{егер} \quad n+10 < 2n+1, \quad n > 9.$$

Демек, тізбектің мүшелері  $n > 9$  мүшесінен бастап кемімелі,  $x_{n+1} < x_n$ , болады.

2) шектелгендігі

$$0 < x_n < \max\{x_1, x_{10}\}$$

Теорема бойынша, тізбек монотонды және шектелген, онда ол тізбек жинақты.

### Сандық тізбектің жинақтылығы үшін Коши критерийі

**Теорема** (Коши критерийі).  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сандық тізбегі жинақты ( $\mathbf{R}$ -де, яғни, ақырлы шегі бар)  $\Leftrightarrow$  ол *фундаментальді (іргелі)*  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ :  
 $\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$

**Есеп.** Коши критерийін қолданып, тізбектің жинақты екенін дәлелдеу керек:

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

**Дәлелдеуі.**

$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \rho \in \mathbf{N}$  сандары берілген.  $|x_{n+p} - x_n|$  айырымын қарастырамыз:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+\rho)!}{(n+\rho)(n+\rho+1)} \right| \leq \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} \right| + \cdots + \left| \frac{\cos(n+\rho)!}{(n+\rho)(n+\rho+1)} \right| \leq$$

$\forall x \in \mathbf{R}$  үшін  $|\cos x| \leq 1$  теңсіздігін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+\rho)(n+\rho+1)} = \\ &= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n+\rho} - \frac{1}{n+\rho+1} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\rho+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right].$  Изделінді нөмір табылды. Ендеше тізбек *фундаментальді*

(іргелі)  $\Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbf{R}.$

**Есеп.** Тізбектің  $\inf x_n, \sup x_n, \underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n$  табу керек.

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**Шешуі.**

1)  $n = 4k - 3,$

$$x_{4k-3} = 1 + 2 + 3 = 6 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 6,$$

2)  $n = 4k - 2,$

$$x_{4k-2} = 1 - 2 - 3 = -4 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -4,$$

3)  $n = 4k - 1,$

$$x_{4k-1} = 1 + 2 - 3 = 0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

4)  $n = 4k,$

$$x_{4k} = 1 - 2 + 3 = 2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2,$$

$$\text{Lim} x_n = \{-4, 0, 2, 6\}, \quad \inf x_n = -4, \quad \sup x_n = 6, \quad \underline{\lim} x_n = -4, \quad \overline{\lim} x_n = 6$$